ARG Austrian Reports on Gravitation

ARG-2007-02

ZUR FRAGE DER RAUMKRÜMMUNG

Rainer Burghardt*

Den in dieser kurzen Abhandlung dargelegten Fortschritt auf dem Arbeitsgebiet 'Gravitationsmodelle' verdanke ich dem engen wissenschaftlichen Kontakt mit H.-J. Treder. In fast zweihundert Briefen gab es Anregungen und auch konstruktive Kritik, die mich auf dem manchmal holprigen Weg zur Lösung zahlreicher Probleme weitergeführt haben.

Es soll untersucht werden, welche Möglichkeiten es gibt, den Begriff Raumkrümmung zu interpretieren und gezeigt werden, welche Konsequenzen unterschiedliche Interpretationen auf die Ausformulierung der Gravitationstheorie haben.

In der Literatur gibt verschiedene Sichtweisen zur Raumkrümmung:

I. Der Begriff Krümmung wird für jeden Raum verwendet, dessen Geometrie nichteuklidisch ist. Ein höherdimensionaler Raum, in dem die vierdimensionale Welt eingebettet ist, wird nicht angenommen. Diese Sichtweise hat den Vorteil, dass auch jene Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen diskutiert werden können, für die es keine Einbettungsmöglichkeiten gibt oder für die solche noch nicht gefunden worden sind.

II. Die Geometrie eines Gravitationsmodells kann durch Einbettung eines gekrümmten Raumes in einen höherdimensionalen ebenen Raum beschrieben werden. Ein solches Verfahren ist aber nicht notwendig, weil die Krümmung durch die inneren Eigenschaften der Fläche alleine beschrieben werden kann.

III. Die Krümmung des Raums wird durch Einbettung von Flächen in einen höherdimensionalen Raum erklärt. Der Vorteil dieser Methode liegt darin, dass man alle Werkzeuge der Differenzialgeometrie, wie die Sätze von Gauss und Codazzi verwenden kann, womit man neue Einsichten in die geometrische Struktur der Modelle gewinnen kann.

An einigen Modellen soll geprüft werden, wie weit man auf dem Weg von I bis III gehen kann. Im Besonderen wird gezeigt, dass die wichtigsten Gravitationsmodelle die

* e-mail: arg@wavenet.at, home page: http://arg.or.at/

Sichtweise III zulassen und, dass mit den Einbettungsmethoden auch neue Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen gefunden werden können.

In der Frühzeit der Gravitationstheorie ist man davon ausgegangen, die Krümmung des Raumes anschaulich zu verstehen. Weltmodelle, wie der Einstein- und de Sitter-Kosmos gehen von einem 5-dimensionalen, flachen Raum aus, in dem ein Kugelraum eingebettet ist, dessen Umfang man abschätzen wollte. Die mathematischen Möglichkeiten hat man nie ganz ausgeschöpft. Gemäss (III) wäre zu ergänzen, dass die kosmologische Konstante λ mit der zweiten Fundamentalform A_{mn} der Flächentheorie dargestellt werden kann. So gilt für den **de Sitter-Kosmos** [1]

$$2A_{m[n}A_{s]}{}^{s} = \lambda g_{mn} \ .$$

Der kosmologische Term in den erweiterten einsteinschen Feldgleichungen ist somit weniger willkürlich, sondern hat ein geometrisches Fundament. Mit verschiedenen Schnitten auf der Pseudo-Hyperkugel kann man den de Sitter-Kosmos sowohl als statisch auch als expandierend interpretieren. Im expandierenden Fall wäre der dreidimensionale raumartige Anteil eben. Das ist in Einklang mit (I), widerspricht aber der Sichtweise (III), die die Invarianz geometrischer Objekte voraussetzt. Nach einer sorgfältigen Analyse zeigt sich, dass die Sichtweise (III) für den de Sitter-Kosmos nicht aufgegeben werden muss. Die expandierende Version kann aus der statischen Version mittels einer nichtlokalen Lorentztransformation hergeleitet werden. Eine Lorentztransformation ist eine Rotation des Bezugssystems auf den lokalen Tangentialebenen des gekrümmten Raums. Die aus dieser Transformation entspringenden Kräfte *kompensieren* jene Kräfte die aus den Raumkrümmungen hergeleitet werden, sodass einem Beobachter, der die Expansion mitmacht, der Raum kräftefrei, also im Sinne der Gravitationstheorie eben erscheint.

Auch der rotierende **Gödelkosmos** [2] lässt sich mit den Methoden der Einbettung durchleuchten. Reskaliert man die Gödelmetrik, stellen die zwei ersten Terme der Metrik das Linienelement auf einer Pseudokugel (Hyperboloid konstanter Krümmung) dar. Hinsichtlich der z- und t-Achse ist die Metrik zylindrisch. Der rotierende Anteil der Metrik entstammt einer zusätzlichen Struktur in diesem Raum. Die φ-Linien umschliessen die t-Achse *spiralförmig*. Gemäss dieser Sicht sind keine geschlossenen zeitartigen φ-Linien aus der Metrik herleitbar und es findet auch keine Kausalitätsverletzung statt. Hingegen hat man einen Abschneideradius in Kauf zu nehmen. Ab einem bestimmten Abstand von der Drehachse des Kosmos erreicht die Bahngeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit. An dieser Stelle bricht auch die mathematische Beschreibung des Modells zusammen.

Mathematisch eng verwandt mit der Transformation, die für den de Sitter-Kosmos beschrieben wurde, ist ein Übergang von statischen Beobachtern zu frei fallenden Beobachtern im **Schwarzschildfeld** [3], das einen nichtrotierenden, ungeladenen, kugelförmigen Himmelskörper umgibt. Die Gezeitenkräfte, die an einem frei fallenden Beobachter wirken, entsprechen den zweiten Fundamentalformen einer zum Gravitationszentrum hin schrumpfenden Fläche. Frei fallende Beobachter bewegen sich auf Geodäten und die Gezeitenkräfte können auch durch die geodätische Abweichung gewonnen werden. Der 3-dimensionale Teil des Krümmungstensors verschwindet für solche Beobachter. Das bedeutet nun nicht, dass die Geometrie sich mit der Wahl des Beobachters ändert, sondern, dass die aus der Raumkrümmung hergeleitete Schwerkraft von einem Term aus der Lorentztransformation vom statischen Beobachter zum frei fallenden Beobachter kompensiert wird.

Eine geometrische Deutung des Raumteils der Schwarzschild-Metrik wurde von Flamm [4] bereits 1916 gefunden, der Zeitteil wurde viel später von Kasner [5], Fronsdal [6] und uns [7] mit einbezogen. Gerade beim Schwarzschild-Modell sind die Unterschiede der Sichtweisen folgenschwer. Gemäss (I) hat die Schwarzschild-Metrik ihre Gültigkeit im Wertebereich r = [0,∞], während gemäss (II) und (III) durch das Flammsche Paraboloid nur der Bereich r = [2M,∞] beschrieben wird. Unterhalb des Gravitationsradius r = 2M kann die Flächentheorie keine Aussage machen, mit ihr können keine schwarzen Löcher beschrieben werden. Der Scheitel der Parabel an r = 2M ist auch die Grenze der Geometrie.

Die von uns verwendete Methode der Einbettung der Schwarzschild-Geometrie unterscheidet sich wesentlich von den Methoden der anderen Autoren. Setzen letztere einen 6-dimensionalen ebenen Raum zur Einbettung voraus, benötigen wir nur fünf Dimensionen, aber sechs Variablen, wobei zwei Variablen eine Dimension gemeinsam haben. So wird der Satz von Kasner [5] und Eisenhart [8] unterlaufen. Die beiden Autoren zeigen, dass für die Einbettung eines Ricci-flachen Raumes mindestens sechs Dimensionen erforderlich sind. Unsere 5-dimensionale Einbettung leitet sich aus einer Doppelflächentheorie her. Durch Rotation der Schwarzschildparabel und der zugehörigen Evolute (Neil'sche Parabel) entstehen zwei Flächen, die durch den Krümmungsvektor der Schwarzschildparabel verbunden sind. Die Schwarzschild-Metrik kann man unter Verwendung von polaren Koordinaten (ε, θ, φ, ψ) vollständig mit den Krümmungen der einzelnen Schnitte der 4-dimensionalen Fläche darstellen:

$$\begin{gathered} ds^2 = \rho_i \rho_k dx^i dx^k, \quad i = k \\ \rho_1 = \rho, \ \ \rho_2 = r, \ \ \rho_3 = r\sin\vartheta, \quad \rho_4 = \rho\cos\varepsilon, \quad dx^1 = d\varepsilon, \quad dx^2 = d\vartheta \quad dx^3 = d\varphi, \quad dx^4 = di\psi \end{gathered},$$

wobei ρ der Krümmungsradius der Schwarzschildparabel, ε ihr Anstiegswinkel und $dt = \rho d\psi$ ist. Entsprechend können die einsteinschen Feldgleichungen in einen Satz von Gleichungen für die Krümmungen zerlegt werden.

Von Kruskal [9] und Szekeres [10] wurde ein Koordinatensystem gefunden, das beide Bereiche, unterhalb und oberhalb des Gravitationsradius mit r =]0,∞], singularitätsfrei bedeckt. Es nimmt für sich in Anspruch, die Schwarzschildgeometrie gemäss (I) vollständig zu beschreiben. Dass (III) jedoch nicht aufgegeben werden muss, lässt sich einfach zeigen, in dem man einen Faktor i in den Definitionsgleichungen des Koordinatensystems herauszieht. Dadurch erzwingt man die Beschränkung auf den Bereich r = [2M,∞]. Die Koordinatentransformation von den Standard-Schwarzschild-Koordinaten auf die Kruskal-Koordinaten wird von einer Lorentztransformation begleitet. Der vormals innere Bereich stellt sich als äusserer Bereich mit einer ‚überdrehten' Lorentztransformation dar, der eine tachyonische Bewegung von Objekten beschreibt. Aus der Lorentztransformation für den verbleibenden Bereich lässt sich die Kruskal-Beschleunigung herleiten. Diese stellt möglicherweise ökonomische Werte für die Raumfahrt bereit.

Das Innere eines Himmelskörpers, der von einem Schwarzschildfeld umgeben ist, wird mit der **inneren Schwarzschild-Lösung** beschrieben. Für das stellare Objekt wird eine homogene Flüsssigkeitskugel angenommen, wobei der Raumteil der Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{r^2}{\mathcal{R}^2}} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 - \frac{1}{4}\left[3\cos\theta_g - \cos\theta\right]^2 dt^2$$

als Metrik auf einer Kugelhaube mit dem Radius $\mathcal{R}$ und dem Grenzwinkel θ_g erkannt wurde. Wird diese Kugelhaube von unten her an geeigneter Stelle auf das Flammsche Paraboloid aufgesetzt, erhält man die **vollständige schwarzschildsche Lösung**. Den Zeitteil der inneren Metrik kann man ebenfalls einer Raumkrümmung gemäss (III) zuordnen [5], wenn man die geometrische Bedeutung des Faktors 3 im Klammerausdruck erkannt hat. Verlängert man an der Nahtstelle zwischen innerer und äusserer Lösung den Krümmungsradius der Schwarzschildparabel bis zur Leitlinie der Parabel, wird diese Strecke im Verhältnis 1:3 unterteilt, wobei der kürzere Teil der Radius der Kugelhaube ist. Der Krümmungsradius der Schwarzschildparabel hat dort den Wert $\rho_g = 2\mathcal{R}$. Schreibt man $dt = \rho d\psi = 2\mathcal{R} d\psi$, wird auch der Zeitteil der Metrik

$$ds^2 = \mathcal{R}^2 d\theta^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 + \left[3\mathcal{R}\cos\theta_g - \mathcal{R}\cos\theta\right]^2 di\psi^2$$

geometrisch deutbar. Die Projektionen $\mathcal{R}\cos\theta$ und $3\mathcal{R}\cos\theta_g$ liegen in der Richtung der Extradimension. Rotiert man beide um den imaginären Winkel $i\psi$, erhält man einen Ringsektor der beiden komplexen Kreise (Hyperbeln konstanter Krümmung), dessen Fläche proportional zur vergangenen Zeit t ist.

Unmittelbar der Flächentheorie entspringt die Möglichkeit, den Spannungs-Energie-Impulstensor mit den verallgemeinerten zweiten Fundamentalformen darzustellen

$$\kappa T_{mn} = 2A_{[m}{}^{s}A_{s]n} - g_{mn} A_{[r}{}^{s}A_{s]}{}^{r} \; .$$

Als Folge der Codazzi-Gleichung verschwindet die kovariante Divergenz dieses Tensors und die Erhaltung von Spannung, Impuls und Energie braucht nicht gesondert gefordert werden. Die Materie wird somit durch ein geometrisches Feld dargestellt, wobei die zugehörigen Feldgleichungen die Codazzi-Gleichungen sind. So betrachtet ist die innere schwarzschildsche Lösung ein erster und einfacher Versuch der Geometrisierung der Materie.

Das Äussere einer elektrisch geladenen Füssigkeitskugel wird durch die **Reissner-Nördström Lösung** [11] beschrieben. Auch für sie ist eine anschauliche Einbettung möglich. Es zeigt sich, dass neben der Schwerkraft eine abstossende elektrische Kraft auftritt, die als Quelle den elektrischen Spannungs-Energie-Impulstensor hat. Mit Hilfe des von uns entwickelten Einbettungsverfahrens ist es recht einfach, einer äusseren eine innere Lösung hinzuzufügen, sofern man die äussere Lösung mit Hilfe von Flächen darstellen kann. So wurde von uns [5] auch eine innere Lösung für das Reissner-Nördström Modell gefunden. Sie hat die Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{r^2}{\mathcal{R}^2}} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 + \left[(\mathcal{R}_g + \rho_g)\cos\theta_g - \mathcal{R}\cos\theta\right]^2 di\psi^2, \quad \rho_g = \mathcal{R}\frac{2Mr_g - e^2}{Mr_g - e^2}$$

und geht für $e = 0 \Rightarrow \rho_g = 2\mathcal{R}$ in die schwarzschildsche Lösung über.

Die **Kerrgeometrie** [12] beschreibt das Feld eines rotierenden Sterns und ist neben der Schwarzschildgeometrie eines der wichtigsten Modelle der Gravitationsphysik. Sie wird am vorteilhaftesten unter Verwendung des elliptisch-hyperbolischen Boyer-Lindquist

Koordinatensystems [13] ausformuliert. Ein ebenes relativistisch rotierendes System erhält man, wenn man wenn man den Masseparameter M der Metrik Null setzt. Bemerkenswerter Weise stellt ein elliptisches System alleine bereits die Grundgrössen für die Rotation zur Verfügung. Um die Einbettung auszuführen, muss man zunächst die Metrik durch eine intrinsische Transformation von den Rotationseffekten befreien. Man erhält so eine Hilfsmetrik (seed metric). Aus ihr lässt sich ein auf eine elliptische Form gequetschter ‚Schwarzschild-Trichter' errechnen. Wegen der unterschiedlichen Steilheit der Wände dieser Fläche pendelt der Normalvektor beim Herumführen auf einem elliptischen Querschnitt auf und ab. Er muss durch einen Einspannungsvektor ergänzt werden, der auf den Querschnitten einen konstanten Anstiegswinkel hat. Werden die Tangentenvektoren der φ- und t-Linien in den lokalen Tangentenebenen um je zwei unterschiedliche Winkel gedreht, hat man die Rotationseffekte implementiert und die volle Kerrmetrik

$$ds^2 = \alpha_S^2 a_R^2 dr^2 + \Lambda^2 d\vartheta^2 + \left(\tau_3 dx^3\right)^2 - 2\cos i\beta''_{AB}\left(\tau_3 dx^3\right)\left(\tau_4 dx^4\right) + \left(\tau_4 dx^4\right)^2$$

erhalten, die den Kosinussatz[†] beinhaltet. Wird die oben genannte elliptische Fläche an geeigneter Stelle abgeschnitten und von unten her, ähnlich wie bei der Schwarzschildgeometrie eine Fläche mit elliptischen Querschnitt mit der Metrik

$$ds^2 = {dx^1}^2 + {dx^2}^2 + \left[\alpha_R dx^3 + i\alpha_R \omega\sigma dx^4\right]^2 + a_T^2\left[-i\alpha_R\omega\sigma dx^3 + \alpha_R dx^4\right]^2$$

$$a_T = \frac{1}{2}\left[\left(1+2\Phi_g^2\right)\cos\eta_g - \cos\eta\right]\Phi_g^{-2}$$

$$\Phi_g^2 = \frac{r_g^2 + a^2}{r_g^2 - a^2}, \quad \cos\eta_g = \sqrt{1-\frac{r_g^2}{\mathcal{R}^2}}, \quad \cos\eta = \sqrt{1-\frac{r^2}{\mathcal{R}^2}} = a_I$$

aufgesetzt, erhält man eine **vollständige Kerrlösung** [14].

Das von uns entwickelte mathematische Verfahren ermöglicht es, jeder äusseren Lösung eine innere beizufügen, sofern die äussere Lösung sich mit den Methoden der Flächentheorie beschreiben lässt und einen Ereignishorizont besitzt. Um eine innere Lösung aus einer bekannten äusseren herzuleiten, hat man zunächst für die äussere Lösung die Flächen aufzufinden. Der Raumteil der Fläche wird oberhalb des Ereignishorizonts abgeschnitten und durch eine weitere Fläche ergänzt, wobei die Tangentenebenen der beiden Flächen an der Nahtstelle zusammenfallen müssen. Für den zeitartigen Anteil der Fläche hat man den Krümmungsvektor der radialen Kurven auf der äusseren Fläche zu berechnen, an der Nahtstelle bis zur Koordinatenachse der Extradimension zu verlängern, auf diese zu projizieren und um den imaginären Winkel iψ zu rotieren. Projiziert man den radialen Krümmungsvektor der inneren Fläche ebenfalls auf die Extradimension und rotiert, erhält man zwei konzentrische (offene) Pseudokreise. Die so entstehende Ringsektorfläche ist proportional zur Zeit und ihre Geometrie schlägt sich im zeitartigen Teil der Metrik der inneren Lösung nieder.

[†] Diese Überlegung bezieht sich auf die pseudoreelle Darstellung des Problems.

Es hat sich gezeigt, dass die Sicht (III) auf alle interessanten Gravitationsmodelle anwendbar ist. Ob die beschriebenen Methoden jedoch ein Ausleseverfahren für physikalisch brauchbare Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen sind, ist gegenwärtig noch nicht abzusehen.

Die in dieser Arbeit verwendeten mathematischen Methoden gehen in ihren Grundlagen auf Arbeiten von H.-J- Treder zurück. Treder [15] hat in einigen Artikeln die Bedeutung lorentzscher und nicht-lorentzscher Transformationen ausführlich untersucht und damit nachhaltig die Weiterentwicklung der Gravitationstheorie beeinflusst.

1. De Sitter, W.; *On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences*. Mon. Not. R.S.A. 76, 699,1916; 77, 155,1916; 78, 1,1917

2. Gödel, K.; *An example of q new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation.* Rev. Mod. Phys. 21, 447, 1949

   Burghardt, R.; *Constructing the Gödel universe*. Science Edition, Bremen 2001, p 47

3. Schwarzschild, K.; *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie.* Berlin. Sitzungsberichte, 1916, p. 189

   Burghardt, R.; *Schwarzschild geometry, once more*. Found. Phys. Lett. **8**, 575, 1995

   Burghardt, R.; *Freely falling observers.* http://arg.or.at/Wpdf/Wff.pdf

4. Flamm, L.; *Beiträge zur Einsteinschen Gravitationstheorie*. Phys. Z. **17**, 448, 1916

5. Kasner, E.*; The impossibility of Einstein fields immersed in flat space of five dimensions.* Am. Journ. Math. **43**, 126, 1921

   Kasner, E.; *Finite representation of the solar gravitational field in flat space of six dimensions.* Am. Journ. Math. 43, 130, 1921

6. Fronsdal, C; *Completion and embedding of the Schwarzschild solution*. Phys. Rev. **116**, 778, 1959

7. Burghardt, R.; *New embedding of Schwarzschild geometry I. Exterior solution.* Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät **61**, 105, 2003 und http://arg.or.at/Wpdf/W5d.pdf

8. Eisenhart, L. P.; *Riemannian spaces*, Princeton 1925

9. Kruskal, M. D. ; *Maximal extension of the Schwarzschild metric.* Phys. Rev. **119**, 1743, 1960

10. Szekeres, G; *On the singularities of a Riemannian manifold.* Publ. Mat. Debrecen **7**, 285, 1960

11. Reissner, ; *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der einsteinschen Gravitationstheorie.* Ann. d. Phys. **50**, 106, 1916

    Nordström, G.; On *the energy of the gravitational field in Einstein's theory.* Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **20**, 1238, 1918

12. Kerr, R. P.; *Gravitational Field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics.* Phys. Rev. Lett. **11**, 237, 1963

13. Boyer, R. H., Lindquist, R. W.; *An interpretation of the Kerr-metric in general relativity.* Proc. Camb. Phil. Soc. **61**, 531, 1965

14. Burghardt, R.; Kerr geometry I-IX. http://arg.or.at/

15. Treder H.-J., *Lorentzgruppe, Einsteingruppe und Raumstruktur.* DAW 1956/57 – Einsteinsymposium 1956

    Kasper U., Treder H.-J., *Heuristische Begründung der Tetradentheorie des Gravitationsfeldes*. Ann. d. Phys. **22**, 202, 1968

    Liebscher D. E., Treder H.-J., *Gravitation theory as theory of non-Lorentzian transformations of the systems of reference*. GRG **1**,117,1970

    Treder H.-J., von Borzeszkowski, H.-H., *Reference system and gravitation.* Int. Journ. Theor. Phys. **4**, 295,1971

    Treder H.-J., *Das Lemma von Weyl als Transport- und Kopplungsvorschrift.* Acta Phys. Hung. **32**, 49, 1972

    Treder H.-J., *Global and local principles of relativity*. Found. Phys. **1**, 77, 1970