ARG Austrian Reports on Gravitation

Gedruckt in Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät 78/79, 55, 2005

ARG-2004-02

Gödelkosmos ohne Zeitreisen

von

Rainer Burghardt[1]

Bald nach Aufstellung der Einsteinschen Feldgleichungen wurden kosmologische Modelle untersucht. Dabei trat das Problem auf, die Stabilität eines Kosmos, der gegenseitig sich anziehende Massen enthält, zu gewährleisten. Einstein erweiterte seine Feldgleichungen durch die kosmologische Konstante und konnte so eine Lösung für einen Kosmos finden, der gleichmäßig mit Materiestaub gefüllt ist. Von anderen Forschern sind expandierende Modelle vorgeschlagen worden. Nach Entdeckung der Hubble-Konstante hat man diesen mehr physikalische Realität zugeordnet, worauf Einstein den Ansatz mit der kosmologischen Konstante verworfen hat.

Dennoch hat die Physikergemeinschaft das Interesse an den erweiterten Feldgleichungen nicht verloren. Von Gödel [1] wurde eine Metrik gefunden, die die Feldgleichungen

$$R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R - \lambda g_{mn} = -\kappa T_{mn} \tag{1.1}$$

erfüllt. λ ist die kosmologische Konstante eines Universums, das gleichmäßig mit Materie erfüllt ist. Der Spannungs-Energie-Impulstensor hat die Form

$$T_{mn} = \mu_0 u_m u_n \,, \tag{1.2}$$

[1] e-mail: arg@aon.at, home page: http://arg.or.at/

wobei μ_0 die Massendichte der Materie und u_m die 4-Geschwindigkeit des Beobachterfelds ist. Gödels Lösung

$$ds^2 = 4a^2\left[\,dr^2 + dy^2 - (\mathrm{sh}^4 r - \mathrm{sh}^2 r)\,d\varphi^2 - 2\sqrt{2}\mathrm{sh}^2 r\,d\varphi\,dt - dt^2\,\right] \qquad (1.3)$$

hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass der Trägheitsindex i der Metrik drei mögliche Werte annehmen kann:

$$\begin{aligned} &\mathrm{sh}^4 r - \mathrm{sh}^2 r < 0\,, \quad i = 2 \\ &\mathrm{sh}^4 r - \mathrm{sh}^2 r = 0\,, \quad i = 1 \\ &\mathrm{sh}^4 r - \mathrm{sh}^2 r > 0\,, \quad i = 0\,, \end{aligned}$$

wobei die zwei letzten Möglichkeiten hinsichtlich ihrer physikalischen Deutung fragwürdig sind. Für den dritten Fall stellt Gödel fest, dass die Metrik zeitartige, in sich geschlossene φ-Linien hat. Über die Möglichkeit von Zeitreisen ist in den vergangenen Jahrzehnten viel geschrieben und das Problem auch philosophisch durchleuchtet worden. Die Diskussion über CTC's (circular time-like curves) nimmt breiten Raum in der modernen Literatur ein.

Über den Umstand, dass es neben den zeitartigen φ-Linien noch die zeitartigen t-Linien gibt, spricht sich Gödel nicht aus. Der Gödelkosmos scheint nicht nur wegen der Möglichkeit der Kausalitätsverletzung unphysikalisch zu sein, auch eine Welt mit zwei Raum- und zwei Zeitdimensionen ist nicht vorstellbar. Auch die Annahme, dass die φ-Linien für i=0 zeitartig sind, ist nicht zwingend. Aus der einfachen Mathematik wissen wir, dass Funktionen imaginäre Werte annehmen können, wenn der Gültigkeitsbereich einer Variablen überschritten wird. Nach diesem Gesichtspunkt wollen wir die Gödelmetrik untersuchen [2]. Zunächst fällt auf, dass in (1.3) die radiale Variable r unter einer hyperbolischen Winkelfunktion steht, was eine geometrisch anschauliche Interpretation der Metrik verhindert. Von Gödel wird auch die konstante Größe a als reziproke Winkelgeschwindigkeit gedeutet, was darauf hinweisen soll, dass das Universum mit konstanter Geschwindigkeit rotiert. Die Position der Winkelgeschwindigkeit in der Metrik ist jedoch ungewöhnlich. Durch eine Galilei-artige Transformation $\varphi \to \varphi + \omega t$ einer Metrik in Polarkoordinaten können wir veranschaulichen, dass die Winkelgeschwindigkeit ω im entstehenden Kreuzterm der Metrik zu erwarten ist

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 + 2\,\omega\, r\sin\vartheta\, r\sin\vartheta\, d\varphi\, dt - \left(1 - \omega^2 r^2 \sin^2\vartheta\right)dt^2\ . \qquad (1.4)$$

Um diesem Gedanken näher zu treten, benennen wir in der Metrik (1.3) die Variablen um

$$a \to \mathcal{R}, \quad 2r \to \psi, \quad \psi/2 \to \chi, \quad 2ay \to z, \quad 2at \to t$$

und erhalten damit das Linienelement in der Form

$$ds^2 = \mathbb{R}^2 d\psi^2 + \mathbb{R}^2 sh^2\psi\, d\varphi^2 + dz^2 - \left[dt + \sqrt{2}\, th\chi \mathbb{R}\, sh\psi\, d\varphi\right]^2 \ , \tag{1.5}$$

das wir einer geometrischen und physikalischen Deutung näher bringen wollen. Die ersten zwei Terme stellen sich unter Zuhilfenahme der Extradimension x^0 als Linienelement auf der Oberfläche einer Pseudokugel (Hyperboloid konstanter Krümmung)

$$x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = \mathbb{R}^2$$

mit dem konstanten Krümmungsvektor $\mathbb{R}$ dar. Da $\sigma = \mathbb{R}\, sh\psi$ der Abstand eines Punktes von der Rotationsachse z des Universums ist, kann man den Ausdruck in der Klammer von (1.5) auch als

$$dt' = dt + th\theta\, \sigma\, d\varphi \tag{1.6}$$

schreiben. Eine Analyse von (1.5) zeigt, dass der zweite Teil der Metrik als Spiralenschar mit dem Anstiegswinkel θ und der Ganghöhe $i\, th\theta\sigma$ interpretiert werden kann, wobei die Spiralen die t-Achse auf koaxialen Zylinderflächen umschlingen. Die Spiralenscharen sind die Weltlinien, auf denen sich die Massenteilchen des Kosmos zwanghaft bewegen müssen. Nachdem aber die riemannschen Eigenschaften der Metrik durch die Einbettung des oben genannten Hyperboloids konstanter Krümmung ausgeschöpft sind, ergibt sich die Notwendigkeit, der Metrik Merkmale zuzuordnen, die über die riemannschen Eigenschaften hinausgehen. Solche Merkmale sind die besonderen Lagen der 4-Beine, die eine innere Struktur auf der Fläche festlegen, im gegenständlichen Fall die oben genannte Spiralenschar. Aus (1.3) oder (1.5) erkennt man, dass diese Struktur, die letztendlich für die Rotation des Kosmos steht, nicht durch eine Lorentztransformation im Tangentialraum der Fläche entfernt werden kann. Die Rotation des Gödelkosmos ist daher nicht einem riemannschen Raum aufgesetzt, sondern geometrisch implementiert. Das lokale Zeitdifferenzial $d\tau$ steht auf den Spiralkurven senkrecht und ist anholonom. Daraus folgt, dass es zwar eine globale Koordinatenzeit t gibt, aber für einen lokalen Beobachter keine globalen physikalischen Zeitlinien τ. Mit (1.6) kann der kritische Term in der Gödelmetrik (1.3) in der Form

$$\left(1 - th^2\theta\right)\sigma^2 d\varphi^2 \tag{1.7}$$

geschrieben werden. Da der hyperbolische Tangens die Werte ± 1 nicht überschreitet, werden - sofern man eine anschauliche geometrische Deutung der Metrik verlangt - auch für die ursprünglichen gödelschen Variablen Wertebereiche festgelegt. Mit der Identifikation

$$\omega\sigma = th\theta = 2\, th\chi, \quad \omega(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2}\mathbb{R} ch^2\chi} \tag{1.8}$$

erkennen wir mit (1.7), dass der kritische Bereich im Gödelkosmos dann erreicht wird, wenn die Bahngeschwindigkeit $\omega\sigma$ den Wert 1, also im natürlichem Maßsystem die Lichtgeschwindigkeit annimmt. $\sigma_c = 1/\omega_c$ ist der Abschneidradius, an dem der Gödelkosmos unphysikalisch wird. Aus der Definition der Winkelgeschwindigkeit (1.8) ergibt sich eine neue Sicht: die Rotation des Kosmos ist nicht konstant, sondern die Winkelgeschwindigkeit ist eine Funktion des radialen Abstands und nimmt nach außen ab, aber nicht schnell genug, um ein Anwachsen der Bahngeschwindigkeit eines Massenpunkts bis an die Lichtgeschwindigkeit zu verhindern. Wenn in einem Modell die Winkelgeschwindigkeit von der Position der Materieteilchen abhängig ist, liegt ein differenzielles Rotationsgesetz vor. Ein solches Gesetz ist durch die Kerrmetrik bekannt, und fügt sich dort widerspruchslos in die Theorie ein, da die Winkelgeschwindigkeit im Unendlichen auf Null absinkt und keinen Abschneideradius erfordert.

In den Einsteinschen Feldgleichungen tritt eine Feldstärke auf, die nach unserer neuen Sicht zweiteilig ist:

$$H = {}^{\mathrm{rot}}H + {}^{\mathrm{diff}}H \,.$$

Der erste Ausdruck entspricht der klassischen Coriolisfeldstärke, der zweite leitet sich aus dem differenziellen Rotationsgesetz her. Beide Teile sind vom radialen Abstand abhängig. Sie ergänzen sich jedoch so, dass eine konstante Gesamtdrehkraft entsteht. Für diese Größe gewinnt man aus den Einsteinschen Feldgleichungen die Beziehung

$$\left[{}^{\mathrm{rot}}H^{s}{}_{m} + {}^{\mathrm{diff}}H^{s}{}_{m}\right]_{|s} = \left[-\kappa\mu_0 + H^{sn}H_{sn}\right]u_m \,, \tag{1.9}$$

die von einem lokal nicht rotierenden System aus betrachtet die Form

$$\mathrm{rot}\left({}^{\mathrm{rot}}\mathbf{H} + {}^{\mathrm{diff}}\mathbf{H}\right) = -\left[\kappa\mu_0\alpha + \alpha\mathbf{H}^2\right]\mathbf{v} \tag{1.10}$$

annehmen würde. Darin ist **v** die relative Bahngeschwindigkeit des Materiepunktes zu diesem System und α der zugeordnete Lorentzfaktor. Die beiden Drehgrößen hätten als Quelle den Strom der rotierenden Materie und die die Drehachse umfließende Rotationsenergie $\mathbf{H}^2$. Da jedoch beide Seiten der Gl. (1.9) verschwinden, ist diese Beziehung für den Gödelkosmos wenig aussagekräftig. Zu den weiteren Merkwürdigkeiten des Gödelkosmos zählt, dass in diesem Modell trotz der Rotation der Materie keine Fliehkräfte auftreten. Da der Zeitteil der Metrik eben ist, beschreibt diese auch keine Schwerewirkung zwischen den Materieteilchen.

Ein realistisches kosmologisches Modell muss auf alle Fälle über ein differenzielles Rotationsgesetz verfügen, das eine radiale Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit beschreibt, die ein Verschwinden dieser im Unendlichen zulässt und in keinem Bereich die Lichtgeschwindigkeit überschreitet.

Zuallerletzt wollen wir noch die Frage aufwerfen, ob Aussagen über ein differenzielles Rotationsgesetz experimentell überprüfbar wären. Beim heutigen Stand der

Technik ist es möglich, Satelliten, die als Antrieb Ionenquellen verwenden, auf Nanometer genau zu justieren. Solche Satelliten kann man in verschiedenen radialen Abständen auf den koaxial rotierenden Zylinderflächen setzen. Dabei müsste man ein Zurückbleiben der äußeren Objekte gegenüber den inneren beobachten können.

Gemäß unserem gegenwärtigen Wissensstand sind im Universum keine Anisotropien beobachtet worden, sodass die Möglichkeit einer kosmischen Rotation als ausgeschlossen betrachtet werden kann. Die Natur bevorzugt offensichtlich einfache Lösungen.

1. Gödel, K.; An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equation of gravitation. Rev. Mod. Phys. **21**, 447, 1949
2. Burghardt, R.; Constructing the Gödel universe.
   Report http://arg.or.at/, ARG-2001-02 und Science edition, Bremen 2002, Seite 47